Anno Accademico 2021/2022
Geometria 1
Prova scritta del 20/6/2022

Esercizio 1.(R1)
Sia $\mathbb{K}$ un campo e n un intero postivo. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ con B di rango 1. Indichiamo con $adj(A) \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice aggiunta classica di A (il cui elemento di posto (i, j) è $(-1)^{i+j} \det A^{\cancel{i}\,|}_{\cancel{j}\,-}$, dove $A^{\cancel{i}\,|}_{\cancel{j}\,-}$ è la matrice ottenuta da A eliminando la colonna i e la riga j.)

a) Mostrare che esistono $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ non nulli tali che $B = \underline{u}\,\underline{v}^\top$.

b) Mostrare che per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{K}^n$ si ha $\det(A + \underline{u}\,\underline{v}^\top) = \det A + \underline{v}^\top adj(A)\underline{u}$.

c) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostrare che $\det(A^2 + BA - AB - B^2) \leq \det(A^2)$.

d) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e n dispari, supponiamo esista $C \in M(n, \mathbb{K})$ tale che $C^2 = B - A^2$. Mostrare che $AC - CA$ è singolare. (Può essere utile considerare le matrici complesse $A + iC$ e $A - iC$).

Esercizio 2.(R1, C)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$. Siano $f, g \in \mathrm{End}(V)$ due endomorfismi triangolabili.

a) Mostrare che se $W \subset V$ è un sottospazio f-invariante, allora ogni base di W la cui bandiera è $f_{|W}$-invariante si estende ad una base di V la cui bandiera è f-invariante.

b) Mostrare che se $fg = 0$ allora f e g sono simultaneamente triangolabili.

c) Mostrare che se $fg \in \mathrm{Span}(f, g)$ allora f e g sono simultaneamente triangolabili. (Considerare prima i casi $fg \in \mathrm{Span}(f)$, $fg \in \mathrm{Span}(g)$).

Esercizio 3.(R2, C)
Sia $\mathbb{K}$ un campo e k un intero positivo. Poniamo $n = 2k + 1$ e sia $Y_n \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice data per colonne $Y_n = (\underline{e}_1 \,|\, \underline{e}_2 \,|\, \cdots \,|\, \underline{e}_k \,|\, \underline{e}_{k+1} + \cdots + \underline{e}_n \,|\, \underline{e}_k \,|\, \underline{e}_{k-1} \,|\, \cdots |\underline{e}_1)$, dove $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$.

a) Mostrare che Y_n è triangolabile.

b) Calcolare il polinomio minimo di Y_n.

c) Determinare la forma normale di Jordan di Y_n.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Sigle dell'esame: R1=Recupero primo compitino; R2=Recupero secondo compitino; C=compito.
Durata: R1,R2 1,5 ore; C 3 ore.

Esercizio 4.(R2, C)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2. Sia $\phi \in PS(V)$ un prodotto scalare su V e sia $W \subset V$ un sottospazio. Sia $U \subset W$ un supplementare di $W \cap Rad(\phi)$: $W = U \oplus (W \cap Rad(\phi))$.
Mostrare le seguenti affermazioni.

a) $Rad(\phi_{|_W}) = Rad(\phi_{|_U}) \oplus (W \cap Rad(\phi))$.

b) $Rad(\phi_{|_{W+W^\perp}}) = Rad(\phi_{|_{W^\perp}}) = (W \cap W^\perp) + Rad(\phi)$. (Può essere utile dimostrare che, dati $U \subset V$, $Z \subset W \subset V$ sottospazi, allora $W \cap (U + Z) = (W \cap U) + Z$).

c) Sia $T \subset W + W^\perp$ un supplementare di $Rad(\phi)$ e sia $T' \subset V$ un supplementare di $Rad(\phi)$ che contiene T: $W + W^\perp = T \oplus Rad(\phi)$, $V = T' \oplus Rad(\phi)$, $T \subset T'$. Allora T ha un unico completamento non degenere contenuto in T'.

d) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $i_+(\phi) = i_+(\phi_{|_W}) + i_+(\phi_{|_{W^\perp}}) + \dim(W \cap W^\perp) - \dim(W \cap Rad(\phi))$.

Esercizio 5.(C)
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\dim V = n \geq 1$.
Dati $\phi \in PS(V)$ un prodotto scalare su V e $f \in V^*$ un funzionale su V, poniamo $V_{f,\phi} = \{\underline{v} \in V |\ f(\underline{w}) = \phi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall \underline{w} \in V\}$, il sottoinsieme di V dei vettori che rappresentano f tramite ϕ. Consideriamo su V e $PS(V)$ la struttura affine standard.

a) Mostrare che $V_{f,\phi}$ è un sottospazio affine di V e, nel caso sia non vuoto, calcolarne la dimensione.

b) Fissati $f_0 \in V^*$ e $\underline{v}_0 \in V$, $\underline{v}_0 \neq \underline{0}$, mostrare che il sottoinsieme di $PS(V)$ $E_{f_0,\underline{v}_0} = \{\phi \in PS(V) |\ \underline{v}_0 \in V_{f_0,\phi}\}$ è un sottospazio affine non vuoto di $PS(V)$ e calcolarne la dimensione.